非線形力学系の積分可能性

吉田春夫

181 東京都三鷹市大沢 2-21-1 国立天文台
e-mail : yoshida@c1.mtk.nao.ac.jp

Abstract

有限自由度の Hamilton 系の積分可能性，不可能性を与える諸定理をまず review する．その上で Ziglin の定理 (1983) にもとづく積分不可能性の証明を詳細に解説する．無限自由度の系 (PDE)，および散逸系については何もふれない．

1 積分可能性

1.1 Liouville-Arnold の定理

包合系をなす第一積分の組．求積可能．作用・角変数

1.2 Hamilton-Jacobi の方程式の変数分離可能性

Liouville, Stackel, Darboux, Whittaker,... 速度について 2 次の積分の存在
I.Marshall and S.Wojciechowski, J. Math. Phys. 29 (1988) 1338.

1.3 単純 Lie 代数と Lax 方程式

Toda lattice．ルート系．Dynkin ダイヤグラム
O.I.Bogoyavlensky, Commun. Math. Phys. 51 (1976) 201.

2 積分不可能性

2.1 Bruns（ブルンス）の定理 (1887)

3 体問題の積分不可能性．歴史的意義．はたして誰が正しく理解しているか
A.R.Forsyth, *Theory of Differential Equations*, Chap. 17 (1900).

2.2 Poincaré の定理：その 1 (1892)

$H = H_0(p) + \mu H_1(p,q) + \mu^2 H_2(p,q) + \ldots$ に対して, $\Phi = \Phi_0(p) + \mu\Phi_1(p,q) + \mu^2\Phi_2(p,q) + \ldots$ なる積分の非存在．無限個の条件必要

2.3 Poincaré の定理：その 2 (1892)

周期解上で $grad\,\Phi_i$ 一次独立なる積分の存在 → すべての特性指数 = 0

2.4 Poincaré-Melnikov analysis

積分可能 → 安定多様体と不安定多様体の transversal な交わり不可

2.5 Ziglin analysis

積分可能 → 多重周期解に付随する Monodromy 群に強い制約
S.L.Ziglin, Funct. Anal. Appl. 16 (1983) 181.

3 Ziglin の定理にもとづく積分不可能性 (Ziglin analysis)

3.1 introduction

次の自由度 2 の Hamilton 系を考える．

$$H = (1/2)(p_1^2 + p_2^2) + (1/4)(q_1^4 + q_2^4) + (\epsilon/2)q_1^2 q_2^2 \qquad (1)$$

ここで，ϵは constant である．この系は$\epsilon = 0, 1, 3$ のとき積分可能であり，多項式の第一積分を実際に書き下すことができる．例えば$\epsilon = 1$ の時, $\Phi = p_1 q_2 - p_2 q_1$（角運動量), $\epsilon = 3$ の時, $\Phi = p_1 p_2 + q_1 q_2(q_1^2 + q_2^2)$ が Hamiltonian と独立な第一積分である．$\epsilon = 0$ の時はあきらか．そこで当然，問題になるのがこれ以外に積分可能な場合があるかということである．任意に与えられた系に対してその積分可能性を決定する algorithmic な判定条件は知られていない．特に積分の非存在を主張することは大変むづかしい．既知の積分不可能性の定理は near-integrable な系にだけ有効で現在の問題には役に立たない．

しかしながら Ziglin の定理にもとづいた解析 (Ziglin analysis) によれば，near-integrable でない系の積分不可能性を主張することができる．ここで本質的な仮定は Hamiltonian が (q,p) の複素解析関数として与えられ，かつ多重周期を持つ特殊解を有することである．Ziglin analysis の結果「Hamilton 系 (1) は$\epsilon = 0, 1, 3$ の時のみ独立な解析的第一積分を有する」ことが結論される．

3.2 Ziglin の定理

(1) は明かな特殊解（直線解）$q_1 = 0$ を有する．このとき q_2は $\ddot{q}_2 + q_2^3 = 0$ を満足し，その解は Jacobi の楕円関数によって

$$q_2(t) = cn(t, 1/\sqrt{2}), \tag{2}$$

と表される．楕円関数は 2 つの周期 T_1, T_2を持つから，直線解 $q_1 = 0$ は 2 重周期解であるといえる．

(1) の直線解 $q_1 = 0$ のまわりの変分方程式のうち直交成分 (Normal Variational Equation, NVE) は

$$\dot{\xi} = \eta, \quad \dot{\eta} = -\epsilon\{q_2(t)\}^2\xi \tag{3}$$

と書ける．(3) は 2 重周期係数を持つ Hill の方程式とみなせる．各々の周期 T_iに対して (3) の解の時間発展

$$\begin{pmatrix} \xi(T_i) \\ \eta(T_i) \end{pmatrix} = M(T_i) \begin{pmatrix} \xi(0) \\ \eta(0) \end{pmatrix} \tag{4}$$

は Monodromy 行列 $M(T_i)$ (i = 1, 2) を定める．$M(T_1), M(T_2)$ は一般に可換でない．Monodromy 行列 $M(T)$ はその固有値（特性乗数）ρ が 1 のべき根でないとき non-resonant と呼ばれる．以上の状況のもとで Ziglin の定理は次のように述べられる．

定　理

Hamiltonian(1) が少なくとも $q_1 = p_1 = 0$ の近傍で解析的かつ独立な第一積分 $\Phi = const.$ を有するとする．さらに，$M(T_1)$ が non-resonant と仮定する．この時，(i) $M(T_1)$ と $M(T_2)$ は可換であるか，(ii) trace $M(T_2) = 0$ とならなければならない．

この結果，例えば $M(T_1), M(T_2)$ 共に non-resonant であること，およびそれらが非可換であることが確認できれば解析的な第一積分の非存在を主張できることになる．

3.3 Ziglin の定理の証明の概要

$\Phi(q,p) = const.$ for the original Hamiltonian system
$\rightarrow I(\xi, \eta, t) = const.$ for the normal variational equations
$\rightarrow I(\xi, \eta) = const.$ for the monodromy group

if $M(T_1)$ non-resonant $\rightarrow$ (i) $M(T_1)$ commutes with $M(T_2)$ or (ii) trace $M(T_2) = 0$.

3.4 Examples

3.4.1 2次元の同次式ポテンシャル

原点を通る直線解が常に存在し，それは多重周期解

NVE は Gauss の超幾何方程式に変換→Monodromy 行列の explicit な表現

$V(q)$ ：次数 k の同次式ポテンシャル ($k \neq 0, \pm 2$)

c：代数方程式 $grad\, V(c) = c$ の 1 つの解

λ_1, λ_2 (= k-1)：Hessian 行列 $D^2 V(c)$ の固有値

Th. if $\lambda_1 \in S_k$ （直線解が指数関数的に不安定） → no additional analytic integral.

H.Yoshida, Physica D 29 (1987) 128.

3.4.2 N次元の同次式ポテンシャル

$V(q)$ ：次数 k の同次式ポテンシャル ($k \neq 0, \pm 2$)

c：代数方程式 $grad\, V(c) = c$ の 1 つの解

$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ ：Hessian 行列 $D^2 V(c)$ の固有値

$\Delta\rho_i := \sqrt{1 + 8k\lambda_i/(k-2)^2}$

Th. if $\Delta\rho_i$ (i = 1, 2,..., N) 有理数体上一次独立 → no additional analytic integral

H.Yoshida, Phys. Lett. A 141 (1989) 108.

3.4.3 非同次式ポテンシャル

任意次数の truncated Toda latttice の積分不可能性 (n=3 : Hénon-Heiles)

H.Yoshida, Commun. Math. Phys. 116 (1988) 529.

3.4.4 その他

Monodromy 行列の数値計算 → velocity dependent potentials

D.Roekaerts and H.Yoshida, J. Phys. A. 21 (1988) 3547.

参考文献（全体的）

V.I.Arnold (Ed.), *Dynamical Systems III*, springer (1988).

吉田春夫，数理科学 1985 年 2 月号，1989 年 5 月号.